# ***Программа вступительного экзамена по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика»***

**Целью** вступительного испытания является оценка уровня освоения поступающим компетенций, необходимых для обучения по направлению ***«Математика и механика»***по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре.

**Программы вступительных испытаний при приеме на обучение в аспирантуре формируются** на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (СУОС Университета ИТМО) по программам специалитета или магистратуры.

**Форма вступительного испытания:** устно-письменная

**Форма вступительного испытания с использованием дистанционных технологий:** тест, устно-письменная

**Продолжительность** проведения вступительного испытания. Продолжительность вступительного испытания - не более 90 минут.

**Критерии оценивания:** “неудовлетворительно”, “Удовлетворительно”, “Хорошо”, “Отлично”

**Минимальный проходной балл,** подтверждающий успешное прохождение вступительных испытаний: оценка “удовлетворительно”.

**Перечень принадлежностей**, которые поступающий имеет право пронести в аудиторию во время проведения вступительного испытания: письменные принадлежности, непрограммируемый калькулятор.

# **Профиль подготовки 01.01.03 «Математическая физика»**

1. Условный экстремум интегрального функционала.
2. Поля экстремалей. Уравнение Гамильтона-Якоби.
3. Регулярная задача Штурма-Лиувилля.
4. Функция Грина задачи Коши для волнового уравнения.
5. Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на сфере.
6. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.
7. Формулы Сохоцкого.
8. Метод стационарной фазы и метод перевала.
9. Теорема Римана об аналитических изоморфизмах. Группы аналитических автоморфизмов расширенной комплексной плоскости и единичного круга.
10. Мера Лебега. Измеримые функции. Различные типы сходимости последовательности измеримых функций, их взаимосвязь.
11. Определение и основные свойства интеграла Лебега.
12. Предельный переход в интеграле Лебега.
13. Функции ограниченной вариации. Функции скачков, абсолютно непрерывные, сингулярно непрерывные функции.
14. Метрические пространства. Компактные множества в метрическом пространстве.
15. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.
16. Банаховы и гильбертовы пространства. Пространства L\_p.
17. Ограниченные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Принцип равномерной ограниченности и сходимость операторных последовательностей.
18. Компактные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах.
19. Замкнутые операторы в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор.
20. Симметричные и самосопряженные операторы. Формулы фон Неймана.
21. Спектральные разложения самосопряженных и унитарных операторов. Функциональное исчисление самосопряженных и унитарных операторов.
22. Интегральные уравнения Вольтерра.
23. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
24. Оператор Шредингера с короткодействующим потенциалом.
25. Теорема разложения для одномерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом.
26. Задача Дирихле для сильно эллиптической системы уравнений.
27. Лучевой метод для решений уравнения Гельмгольца.
28. Задача рассеяния.
29. Прямые методы вариационного исчисления.
30. Расширения симметрических операторов.

**Профиль подготовки 01.02.01 «Теоретическая механика»**

1. Скорость и ускорение точки.
2. Абсолютное, относительное и переносное движения точки. Формула сложения скоростей.
3. Угловые скорость и ускорение вращательного движения тела. Формулы распределения скоростей и ускорений.
4. Формула сложения ускорений в сложном движении точки. Кариолисово ускорение.
5. Формулы распределения скоростей и ускорений при плоском движении тела.
6. Моменты силы относительно координатных осей и векторный момент силы относительно точки. Главный вектор и главный момент системы сил.
7. Уравнения равновесия тела под действием плоской системы сил.
8. Уравнения равновесия тела под действием пространственной системы сил.
9. Второй и третий законы динамики Галлилея-Ньютона.
10. Второй закон динамики в кинетостатической форме Даламбера.
11. Координаты центра масс механической системы.
12. Теорема о движении центра масс механической системы.
13. Осевые и центробежные моменты инерции тела, тензор инерции в точке тела.
14. Главные оси инерции в точке твердого тела.
15. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.
16. Кинетические энергии тела при поступательном, вращательном и плоском движениях.
17. Углы Эйлера при сферическом движении тела вокруг точки Векторная угловая скорость тела.
18. Кинетическая энергия сферического движения тела.
19. Голономные стационарные связи несвободной системы, обобщенные координаты и обобщенные скорости, число степеней свободы.
20. Выражение кинетической энергии механической системы с одной степенью свободы, приведенный коэффициент инерции механизма.
21. Мощность силы, приложенной к точке подвижного тела.
22. Мощность системы сил, приложенных к механической системе.
23. Работа силы на перемещении за конечный интервал времени.
24. Работа системы сил за конечный интервал времени.
25. Потенциальное силовое поле. Мощность потенциальной силы и системы потенциальных сил.
26. Потенциальная энергия в точке потенциального силового поля. Примеры.
27. Выражение работы потенциальной силы через разность значений потенциальной энергии.
28. Теорема об изменении кинетической энергии за конечный интервал времени.
29. Уравнение сохранения механической энергии консервативной системы со стационарными идеальными связями.
30. Динамическое уравнение Лагранжа для механической системы с одной степенью свободы.
31. Уравнения Лагранжа для механической системы с несколькими степенями свобод.

# **Профиль подготовки 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»**

1. Понятие сплошного тела. Гипотеза сплошности. Физически и геометрически малый элемент. Деформация элемента сплошной среды. Два способа описания деформации сплошного тела. Координаты Эйлера и координаты Лагранжа. Переход от Эйлерова описания к Лагранжеву и обратно.
2. Тензор деформации Коши-Грина. Геометрический смысл компонент тензора деформации Грина. Тензор деформации Альманси. Геометрический смысл компонент тензора деформации Альманси. Условия совместности деформаций. Формулировка условий совместности деформаций в цилиндрической и сферической системе координат. Вы­числение тензора малых деформаций по заданному полю перемещений. Формулы Чезаро.
3. Классификация сил в механике сплошных сред: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Тензоры напряжений Коши, Пиолы и Кирхгофа.
4. Законы сохранения механики сплошных сред: уравнения баланса массы, импульса, момента импульса, кинетической, потенциальной и полной энергии.
5. Термодинамические процессы и циклы. Термодинамические параметры состояния. Понятия о работе, теплоте, внутренней энергии, температуре и энтропии. Первый и второй законы термодинамики. Термодинамические потенциалы состояния.
6. Физическая размерность. Анализ размерностей и П-теорема. Автомодельные решения. Примеры.
7. Упругое деформирование твердых тел. Упругий потенциал и энергия деформации. Линейно упругое тело Гука. Понятие об анизотропии упругого тела. Тензор упругих модулей. Частные случаи анизотропии: трансверсально изотропное и ортотропное упругое тело. Упругие модули изотропного тела.
8. Полная система уравнений теории упругости. Уравнения Ламе в перемещениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла в напряжениях. Граничные условия. Постановка краевых задач математической теории упругости. Основные краевые задачи. Принцип Сен-Венана.
9. Общие теоремы теории упругости: теорема Клапейрона, тождество взаимности, теорема единственности. Основные энергетические функционалы линейной теории упругости. Вариационные принципы теории упругости: принцип минимума полной потенциальной энергии, принцип минимума дополнительной энергии. Теоремы Кастильяно. Теорема Бетти. Примеры.
10. 1Действие сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде. Тензор Грина. Граничные интегральные представления напряжений и перемещений. Формула Сомильяны. Общие представления решений уравнений теории упругости: представле-ние Кельвина, представление Галеркина и представление Папковича-Нейбера. Нормальная нагрузка на границе полупространства (задача Буссинеска). Касательная нагрузка на границе полупространства (задача Черрути).
11. Задача о действии штампа с плоским основанием на полуплоскость. Контактная задача Герца.
12. Пластическое деформирование твердых тел. Предел текучести. Упрочнение. Остаточные деформации. Истинная и условная деформация. Идеальная пластичность. Физические механизмы пластического течения. Понятие о дислокациях. Локализация пластических деформаций. Линии Людерса-Чернова.
13. Идеальное упругопластическое тело. Идеальное жесткопластическое тело. Пространство напряжений. Критерий текучести и поверхность текучести. Критерии Треска и Мизеса. Пространство главных напряжений. Геометрическая интерпретация условий текучести. Условие полной пластичности. Влияние среднего напряжения.
14. Упрочняющееся упругопластическое тело. Упрочняющееся жесткопластическое тело. Функция нагружения, поверхность нагружения. Параметры упрочнения.
15. Понятие о ползучести и релаксации. Кривые ползучести и релаксации. Простейшие модели линейно вязкоупругих сред: модель Максвелла, модель Фохта, модель Томсона. Время релаксации. Время запаздывания.
16. Определяющие соотношения теории вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации. Непрерывные ядра и ядра со слабой особенностью. Термодинамические ограничения на выбор ядер ползучести и релаксации.
17. Формулировка краевых задач теории вязкоупругости. Методы решения краевых задач теории вязкоупругости: принцип соответствия Вольтерры, применение интегрального преобразования Лапласа, численные методы. Теорема единственности.
18. Определяющие соотношения нелинейной теории вязкоупругости. Разложение Вольтерры-Фреше. Упрощенные одномерные модели.
19. Понятие о разрушении и прочности тел. Общие закономерности и основные типы разрушения. Концентраторы напряжений. Коэффициент концентрации напряжений: растяжение упругой полуплоскости с круговым и эллиптическим отверстиями.
20. Феноменологические теории прочности. Критерии разрушения: деформационный, энергетический, энтропийный. Критерии длительной и усталостной прочности. Расчет прочности по допускаемым напряжениям. Коэффициент запаса прочности.
21. Двумерные задачи о трещинах в упругом теле. Метод разложения по собственным функциям в задаче о построении асимптотик полей напряжений и перемещений у вершины трещины в упругом теле. Коэффициент интенсивности напряжений, методы его вычисления и оценки.
22. Метод конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных разностей для дифференциальных уравнений теории упругости.
23. Вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии упругого тела. Методы Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина и градиентного спуска в задачах минимизации функционала полной потенциальной энергии.
24. Метод конечных элементов в теории упругости. Пределы применимости метода конечных элементов.
25. Формула Сомильяны и метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов).
26. Понятие дефектов кристаллической структуры: межузельные атомы, вакансии, дислокации, дисклинации. Прочность идеального кристалла. Дислокации, их типы, вектор Бюргерса, системы скольжения. Зарождение и взаимодействие дислокаций. Сила, действующая на дислокацию (сила Пича-Келера).