Чья площадь больше

Бусенька и ее друзья — мышь Огрыза, уж Ушася и таракан Кузька — праздновали день рождения дятла Спятла. Интересные конкурсы, прекрасное угощение и подаренный виновнику торжества торт со слониками сделали праздник интересным и запоминающимся. Как вдруг...

— Спасайся, кто может! — закричал дятел Спятел и выпрыгнул в окно.

Гости бросились врассыпную. Огрыза нырнула в подвал, Кузька исчез за шкафом, а Бусенька, схватив Ушасю за что попалось (а попался, естественно, хвост), запрыгнула в сейф дятла Спятла, выкинув из него статуэтку Хрустального Питона. Комната начала заполняться блестящими кольцами питона Уккха.

— Где же именинниккхх? — поинтересовался Уккх. — И куда пропали госсссти? — продолжал он, осматриваясь, постоянно высовывая длинный раздвоенный язык — принюхиваясь. — А, вот вы куда залезли, — сказал он, заметив сейф.

— Вылезайте, — строго сказал Уккх, и сквозь замочную скважину посмотрел на Ушасю так, что тому захотелось все бросить и побежать, запрыгать, поползти, протиснуться, полететь и броситься прямо Уккху в пасть. К счастью, Бусенька крепко держала дверь.

— Не вылезем! — сказала она. — Дверь закрыта, а площадь сечения замочной скважины — 3 квадратных сантиметра — слишком мала, чтобы мы через нее пролезли.

Уккх проглотил огромный кусок торта («Мммм..., какие вкусные слоники!»), отправил в пасть миску витаминного салата из огурцов с остроухом и задумался. Взгляд его немного подобрел.

— У замочной скважины довольно сложная форма, — наконец, сказал он. — Как же ты подсчитала ее площадь?

— Сначала съешь вон ту банку варенья, — сказала Бусенька, не отпуская дверцу, — а после этого поговорим!

Уккх схватил кончиком хвоста банку варенья и послушно проглотил ее содержимое. Поморщившись и поискав взглядом по сторонам, он кинул в пасть нераспечатанную упаковку печенья. Бусенька выждала 20 секунд и приоткрыла дверцу сейфа.

— Печеные яблоки явно удались! — посоветовала она, показав на блюдо с яблоками. Уккх тут же надкусил одно яблоко и одобрительно кивнул.

— Как я подсчитала площадь? Да как обычно. Что такое площадь фигуры? Это такое число. Во-первых, оно неотрицательно. Во-вторых, площадь совсем простой фигуры, например, прямоугольника равна произведению длин его сторон. В третьих, если маленькая фигура содержится в большой, то площадь маленькой фигуры не может быть больше площади большой фигуры. И наконец, в-четвертых, если фигуру разрезать по прямой на две части, площадь фигуры будет равна сумме площадей частей.

— А если резать не по прямой? — с подозрением спросил Ушася.

— Все зависит от того, как ты понимаешь слово «резать».

— Какое непростое определение, — сказал Уккх, — и как же найти площадь сложной фигуры, такой как сечение замочной скважины?

— И вообще, у любой ли фигуры существует площадь? — усомнился Ушася.

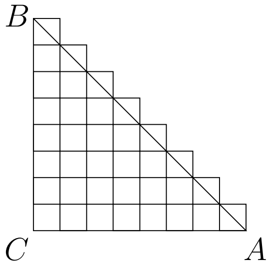
— У любой! — стала объяснять Бусенька. — Представим себе, что мы накрыли фигуру несколькими квадратами, причем будем использовать только квадраты с вертикальными или горизонтальными сторонами. Подсчитаем сумму их площадей. Потом покроем фигуру квадратиками помельче, чтобы они лучше прилегали к ее границам. Снова подсчитаем сумму площадей. Каждое такое вычисление дает нам слегка завышенное значение площади фигуры. Чем больше таких экспериментов мы проведем, тем точнее нам будет известна площадь фигуры.

— Неужели этот громоздкий рецепт действительно позволяет вычислить площадь хоть какой-нибудь фигуры? — спросил Уккх.

— Конечно позволяет! Вот, например, найдите, чему равна площадь треугольника.

— Ну..., если это не очень сложно...

— Не должно быть сложно, — воодушевился Ушася. — Возьмем прямоугольный треугольник ABC — половину единичного квадратика. Положим его на лист клетчатой бумаги. Пусть длина стороны клетки равна $1/n$. Тогда вдоль стороны помещается ряд из n клеток



(на рисунке оказалось $n = 8$). А весь треугольник покрывается ступенчатой фигурой из клеточек: в верхнем ряду одна клетка, во втором ряду – две, в третьем — три и т.д., вплоть до последнего ряда, где n клеток. Всего, значит, имеется

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

клеток. Площадь одной клеточки равна $1/n^2$, значит, суммарная площадь этой клетчатой фигуры равна

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Чем больше мы возьмем число n, тем меньше будут сторона клеточки $1/n$ и слагаемое $1/2n$ в подсчитанной нами суммарной площади, и тем ближе будет эта величина к $1/2$. Поэтому площадь этого треугольника равна $1/2$.

— И для замочной скважины вычисления аналогичны, — подтвердила Бусенька. — Только там формулы похитрее. Но у меня геометрический сопроцессор, мне такие штуки легко даются.

— Все ясно, – сказал Уккх. — А правильно ли я понял, что необязательно брать квадратики одинакового размера? И вообще можно брать не квадратики, а прямоугольники. Некоторые могут быть совсем крупными, а некоторые совсем маленькими.

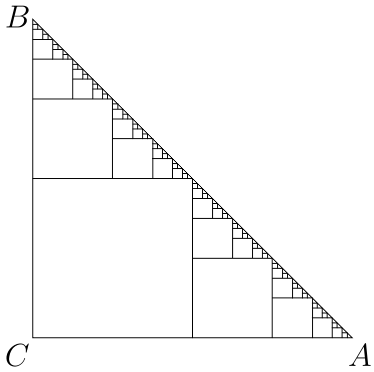
— Зачем так усложнять? — возразил Ушася. — Сначала берешь крупную сетку, потом помельче, потом — совсем миллиметровку... Главное, каждый раз учитывать только те квадратики, которые задевают фигуру. Очень хороший и практичный способ получается, мне он очень нравится.

— Нет-нет, — не согласилась Бусенька, — клеточки могут быть разными, не только квадратными, но и прямоугольными. Если вам нужно, они могут пересекаться, и вообще их может быть бесконечно много!

— Как это бесконечно много? Мы же считаем площадь ограниченной фигуры!

— Ну да, фигура ограниченная, скажем, помещается на одном листе бумаги, но накрывая фигуру, мы можем брать квадратики все меньшего и меньшего размера — так, что в результате их общее количество будет бесконечным!

— Я понял, — сказал Уккх. — Например в предыдущем вычислении можно было бы накрыть весь треугольник такими вот уменьшающимися клеточками. Тут вообще все клеточки умещаются внутри фигуры. Правда... если мы хотим, чтобы треугольник содержался в объединении этих клеточек, лучше бы взять его без стороны AB. Зато клеточек получается бесконечно много!



— Только не надо думать, что прямоугольники обязательно должны умещаться внутри фигуры, — предупредила Бусенька, — они запросто могут вылезать за ее пределы — так же, как это было в вычислении Ушаси.

— Мой подход к вычислению площади значительно проще и удобнее, чем у Уккха! — заявил Ушася.

— А мой — более гибкий! — возразил Уккх и облизнулся.

— Да что тут спорить, — вмешалась Бусенька, — давайте я попрошу вас вычислить площадь какой-нибудь хитрой фигуры, у кого лучше получится — тот и прав!

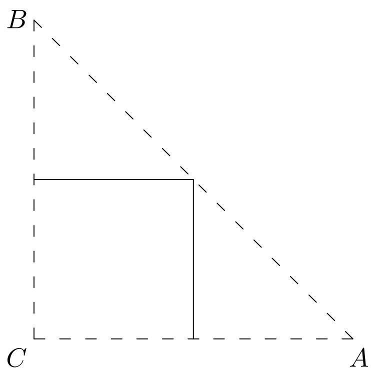
— Разве таким способом принято решать математические споры? — усомнился Ушася.

— Давай нам свою хитрую фигуру, — энергично потребовал Уккх.

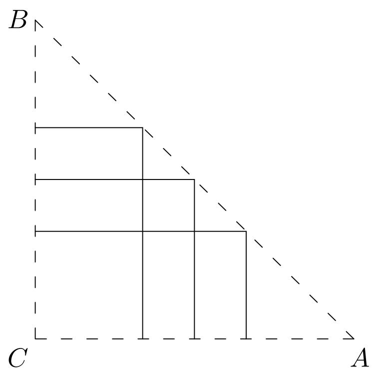
— Хорошо. Но сначала скажите-ка мне для разминки, чему равна площадь одной точки, например, точки A из нашего предыдущего треугольника?

— Нулю, — тут же сказал Уккх, — мы можем накрыть точку квадратиком со стороной 1, значит, площадь точки меньше 1. Но мы можем накрыть ее и квадратиком со стороной $1/10$, тогда получится, что площадь точки меньше $1/100$. И точно также окажется, что площадь точки меньше любого другого положительного числа. Значит, площадь равна нулю.

— Ладно, вот тогда вам хитрая фигура! Возьмем все тот же треугольник ABC. И нарисуем внутри него линии первой сетки — той, где размер клеточек был равен $1/2$. Потом нарисуем внутри него линии более мелкой сетки — со стороной $1/3$. Кстати, а чему равна площадь «лесенки», составленной из этих линий?



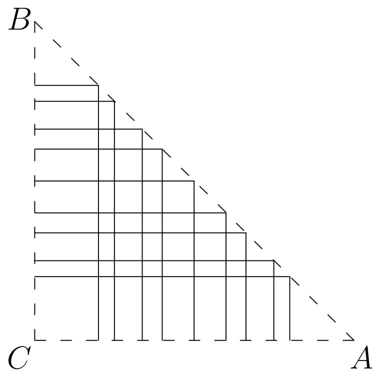
Нарисуем сетку со стороной $1/2$



Добавим сетку со стороной $1/3$. Получилась «лесенка»

— Тоже нулю, — выпалил Ушася. — На листе из очень мелкой миллиметровки каждый нарисованный отрезок накрыт длинным прямоугольником, состоящим из одного ряда клеток. Ширина такого прямоугольника равна стороне одной клетки, поэтому его площадь очень мала. Всего у нас будет шес-с-с-ть таких прямоугольников, их суммарная площадь тоже очень мала. Какое положительное число ни возьми, эту лесенку можно накрыть прямоугольниками, у которых сумма площадей будет меньше этого числа. Значит, площадь лесенки равна нулю.

— Правильно! — согласилась Бусенька. — Но я еще не дорисовала хитрую фигуру. Мы уже нарисовали линии сетки со сторонами $1/2$ и $1/3$. Теперь нарисуем линии следующей сетки — со стороной $1/4$, потом со стороной $1/5$ — и так далее (до бесконечности). Моя хитрая фигура — это объединение всех-всех этих линий. Спрашивается, чему равна ее площадь?



Потом добавим сетки со стороной $1/4$ и $1/5$ ...

— Одной второй, — немного подумав, сказал Ушася.

— Нулю, — почти сразу же с ним произнес Укkх.

— А как вы посчитали?

— Возьмем совершенно любую квадратную сетку, — стал объяснять Ушася, — к примеру со стороной квадрата $1/100$. Посмотрим только на квадратики, накрывающие треугольник. Мы должны выбрать из них набор квадратиков, накрывающих хитрую фигуру. Но фигура действительно ужасно хитрая: она ведь содержит все линии более мелкой сетки со стороной $1/200$, а они рассекают каждый квадратик сетки со стороной $1/100$. Получается, что для того, чтобы накрыть фигуру, нам придется взять все квадратики, накрывающие треугольник ABC! Значит, любое измерение площади фигуры «по клеточкам» дает такой же результат, как для треугольника ABC. Поэтому площадь фигуры равна площади треугольника!

— Хм, вроде все верно. А ты как посчитал? — спросила Бусенька Укkха.

— Площадь равна нулю, поскольку я могу накрыть эту фигуру набором прямоугольников сколь угодно маленькой площади, — уверенно сказал Укkх. — Вот, например, как построить набор прямоугольников, чтобы их суммарная площадь была равна $\frac{1}{1000}$? Начнем рисовать первую сетку (со стороной $\frac{1}{2}$). Нарисуем первый отрезок и сразу накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{2}$. Нарисуем второй отрезок и накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{4}$. Потом нарисуем третий отрезок. Ой, нет, в первой сетке больше нет отрезков, значит, переходим к рисованию отрезков второй сетки. Рисуем отрезок второй сетки и накрываем его прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{8}$. И так далее: рисуя очередной отрезок очередной сетки, тут же накрываем его прямоугольником, площадь которого в два раза меньше предыдущего прямоугольника. Получится бесконечно много прямоугольников, но их площадь конечна и очень мала. Она равна

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\right)=\frac{1}{1000}.$$

Итак, я накрыл фигуру прямоугольниками, суммарная площадь которых равна $1/1000$, а мог бы вместо $1/1000$ взять любое другое положительное число. Значит, площадь фигуры равна нулю.

— Выглядит убедительно, — согласилась Бусенька.

— Моя площадь больше — значит, я выиграл! — закричал Ушася.

— А тогда я тебя съем! — злобно ответил Уккх.

Но Бусенька была начеку. Схватив Ушасю за что попало (да-да, опять за хвост, вы правильно догадались), она прыгнула в сейф. Уккх посмотрел на захлопнувшуюся дверцу и на Хрустального Питона, валявшегося на полу, и грустно облизнулся.

— Здорово я его обыграл? — спросил Ушася Бусеньку, когда увидел, что они надежно заперлись в сейфе.

— Здорово, — сказала Бусенька. — Но ты заметил, что площадь у тебя *странная*? Площадь хитрой фигуры равна $1/2$, и точно так же проверяется, что площадь остальной части треугольника тоже равна $1/2$. Получается, что мы разбили треугольник площади $1/2$ на две части, и у обеих частей площадь равна $1/2$!

— Действительно странно... Но погоди, это же не противоречит твоему определению площади! Ты же говорила, что площадь фигуры равна сумме площадей кусочков в том случае, когда мы режем фигуру по прямой. А здесь нет ничего похожего на разрезание по прямой. Твою хитрую фигуру вообще невозможно вырезать из треугольника! А что, у Уккха площадь не странная?

— Тоже странная. Но в этом можно убедиться с помощью уж совсем хитрых фигур.

— Ну, значит, я действительно его победил!