

Как Бусенька складывала числа «в столбик»

Не очень-то легко, оказывается, сидеть на дереве, если ветер достаточно силен. Бусенька вцепилась в ветку изо всех сил. Ветка раскачивалась, как маятник.

- Ну и непогода, — пробормотала Бусенька.
- Года два такой не было, — согласился Кто-то.

От неожиданности Бусенька потеряла равновесие и чуть было не полетела вниз. Но снизу появилось что-то, что не дало ей упасть: то ли лапа, то ли клешня, то ли хобот обвил Бусеньку и держал довольно крепко.

- Позвольте представиться, меня зовут Уккх, — сказал Кто-то.
- Укхмгм.... — задрожала Бусенька.

— Не Укхмгм, а Уккх! — сказала существо. — Я питон. И можете не волноваться, сейчас я совершенно сыт.

Посмотрев на питона, Бусенька не поняла, почему это она может не волноваться. Зре-лице было довольно жутким. К тому же лапа, клешня или хобот оказались хвостом пито-на, который по-прежнему крепко держал Бусеньку. Выбора, похоже, не было. Пришлось поверить на слово и не волноваться.

- Я — Бусенька, — сказала Бусенька. — Как вовремя Вы меня подхватили.
- Я все делаю вовремя, — сказал питон. — Не люблю опаздывать.
- А что это Вы тут, на дереве, вовремя делаете в такую непогоду?
- Домашнее задание. Тема «сложение чисел в столбик». Увлекательнейшая штука, скажу я вам.

И Уккх поднял Бусеньку повыше. Меж толстых веток, которые совсем не качались на ветру, была установлена доска и на ней написано несколько примеров.

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 11 \\ \hline ?? \end{array} \quad \begin{array}{r} 55 \\ + 33 \\ \hline ?? \end{array} \quad \begin{array}{r} 65 \\ + 35 \\ \hline ?? \end{array}$$

— Примеры, как примеры, — сказала Бусенька, подойдя к доске. — А почему цифры разной высоты?

— Цифры? А, ну да, можно их и так называть. Видите ли, мы записываем числа очень специальным способом, он называется¹ CRT(9,7). Первая цифра — это остаток числа при делении на 9, а вторая — остаток числа при делении на 7. Поскольку 9 больше 7, мы первую цифру пишем немного крупнее — так нагляднее получается.

— Ничего не понимаю. Если я к числу прибавлю 63, получится другое число, и у него будут такие же остатки при делении на 9 и на 7, т. е. такие же цифры?

— Да. Дело в том, что мысль прибавить к числу 63 идеологически неверна! — сказал Уккх, патетически дернув хвостом. — Потому что способ записи CRT(9,7) годится только для чисел от 0 до 62. Вот вы когда пишете обычные двузначные числа, вы же не можете записать с их помощью число больше 99. Зато любое число от 0 до 99 однозначно записывается с помощью двух цифр (если разрешить ноль в качестве первой цифры). И в нашей системе CRT(9,7) каждое сочетание из двух цифр однозначно задает число от 0 до 62.

— Все равно не понимаю. Вот в первом примере число 21 — что это за число?

— Да что же тут непонятного? Это то самое, единственное и неповторимое, число из диапазона [0, 62], которое при делении на 9 дает остаток 2, а при делении на 7 — остаток 1.

— Да, но что это за число? Чему оно равно?

— Вы начинаете меня беспокоить, — нервно сказал Уккх. — А я, когда беспокоюсь, сразу становлюсь голодным, так что поосторожнее с этим. Я вам полностью описал это

¹ Этот способ назван так в честь китайской теоремы об остатках (Chinese remainder theorem).

число. С помощью моего описания оно задается однозначно. А вы спрашиваете, чему оно равно. Вот самому себе оно и равно!

— Но я не привыкла к таким описаниям! Я записываю числа и могу думать про них только с помощью десятичной системы счисления, а не CRT(9,7)!

— А, вы хотите конвертировать его в десятичную систему счисления! Так бы сразу и говорили. Сейчас-сейчас, где-то тут у меня завалилась... Куда же я ее дел... Вот она! — И Уккх протянул Бусеньке таблицу. — С помощью этой таблицы мы с вами с легкостью найдем общий язык!

	①	②	3	4	5	6	0	
1	1	37	10	46	19	55	28	
②	②9	2	38	11	47	20	56	
③	57	③0	3	39	12	48	21	
4	22	58	31	4	40	13	49	
5	50	23	59	32	5	41	14	→
6	15	51	24	60	33	6	42	21 = 29
7	43	16	52	25	61	34	7	32 = 30
8	8	44	17	53	26	62	35	
0	36	9	45	18	54	27	0	

— Какой интересный способ записи, этот ваш CRT(9,7), — сказала Бусенька, внимательно изучив таблицу. — И трудно складывать числа, записанные таким способом?

— Проще простого! Чтобы найти сумму двух чисел, надо по отдельности сложить первые две цифры и последние две цифры! Вот, например, решим первый пример. — И Уккх, взяв кончиком хвоста кусочек мела, написал на доске.

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 11 \\ \hline 32 \end{array}$$

— Ну-ка я проверю, — сказала Бусенька, держа наготове таблицу. — Так, 21 — это по-нашему 29, 11 — это по-нашему, хм..., надо же, это 1. В сумме получается 30. А 30 питоша записывает как 32. И-и-и-и-и-и!!!

— Что это было?

— Как-то само собой взвизгнулось, извините, — покраснела Бусенька. — Давайте еще что-нибудь сложим!

— Да пожалуйста, — и Уккх записал второй пример на сложение.

$$\begin{array}{r} 55 \\ + 33 \\ \hline 81 \end{array}$$

— Этот я тоже проверю, — сказала Бусенька, не выпуская таблицу из рук. — Нет, не может быть, как это? В одном случае 5 + 3 — это 8, а в другом — 1?

— Ну, я забыл сказать, что есть еще одно правило — правило *непереносов*. Если Вы, милая вкусная Бусенька, при сложении очередных цифр получаете сумму больше 10, Вы записываете в качестве очередной цифры число на 10 меньше, чем получилось, а потом еще делаете перенос. А у нас — все то же самое, только без переноса! Если при сложении

вторых цифр получается 7 или больше, то нужно сделать неперенос — т.е. отнять от этого числа 7 и все! В нашем случае $5 + 3 = 8$, отнимаем 7 получается 1. И аналогичное правило действует для первых цифр, только там вместо семи — девять.

— Тогда можно я третий пример сама решу? — торопливо спросила Бусенька, схватив мел (ей показалось, что сытость Уккха начинает уменьшаться). — Первый столбец: $5 + 5$ — это 10; вычитаем 7, остается 3. Второй столбец: $6 + 3$ — это 9; отнимаем... 9? Получается 0.

$$\begin{array}{r} 65 \\ + 35 \\ \hline 03 \end{array}$$

Проверяем... 65 — это 33, 35 — это 12, $33 + 12 = 45$, а 45 мы записываем как... вот оно, в последней строчке таблицы — как 03. Сошлось!

Уккх одобрительно кивнул и пододвинулся к Бусеньке.

— А умножать числа в такой записи тоже можно?

— Можно. Мы этого в школе еще не проходили, но говорят, правило то же самое — отдельно перемножаем первые цифры, отдельно вторые, только вот непереносов может понадобиться больше.

— Так просто? Не может быть! Тогда давайте умножим 65 на 35!

— Не получится. Мы же работаем с числами, не превосходящими 62, а это произведение слишком большое! — сказал Уккх и облизнулся.

— Тогда давайте умножим 12 на 5. По системе CRT(9,7) число 12 записывается как 35, а число 5 — как 55, перемножаем...

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 55 \\ \hline 1525 \\ \downarrow -9 \text{ (один раз), } -7 \text{ (три раза)} \\ 64 \end{array}$$

А 64 — это по-нашему 60! Здорово! — Бусенька положила мел на место, и с ужасом поняла, что его «место» — это большая обеденная тарелка. Бусенька осмотрелась. — И как это вы только догадались, что нужно рассматривать остатки от деления на 7 и на 9, чтобы построить такую замечательную систему счисления? — спросила она, приметив неподалеку от себя крепкую пружинистую ветку.

— То, что мы берем 7 и 9, как раз не очень существенно. Можно брать совершенно любые числа, лишь бы у них не было общих делителей. И не обязательно брать два числа, можно три, пять, сколько угодно — правила действий будут точно такие же. Вот только конвертировать в десятичную систему неудобно. Из десятичной в CRT — запросто, например, число 2014 по системе CRT(7,8,9,11) запишется как 5671. Чтобы получить эту запись, нужно просто вычислить остатки при делении числа 2014 на 7, 8, 9 и 11. А вот перевод обратно... — и Уккх разочарованно махнул кончиком хвоста.

И тут Бусенька не выдержала и прыгнула прямо на ветку. Ветка спружинила и подбросила ее высоко вверх. И ветер тут же понес Бусеньку куда-то вдаль, где совершенно точно никого не интересовало, как перевести число 1235 из системы CRT(7,8,9,11) в десятичную².

²Но вы все-таки переведите.